التكاملات الثنائية الشاذة

د. منير الترك

رياضيات(3)

تمرين:

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, d(x)d(y)$$

$$D = \begin{cases} y = 0 \\ y = x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

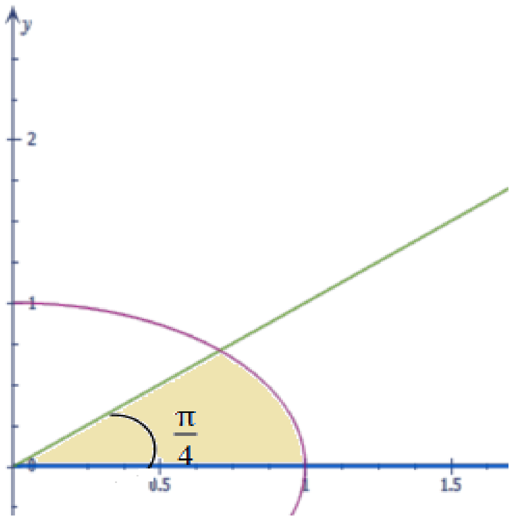
حيث أن D في الربع الأول فقط

الحل:

لنستعين بالإحداثيات القطبية ونفرض أن $x^2 + y^2 = r^2$ ومن ثم لنوجد حدود التكامل من الرسم: بما ان الدائرة مركزية فإن نصف قطرها ثابت أي أنه يتغير بين أدنى قيمة له وهي الصفر إلى أعلى قيمة له وهي الواحد

أما بالنسبة للزاوية فإنها محصورة بين محور الاحداثيات ox و مستقيم منصف الربع الأول وهو $y{=}x$ اذا فإن الزاوية محصورة بين الصفر و $\frac{\pi}{4}$ لنعوض المعطيات في التكامل المعطى فنجد: $I =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^1 \sqrt{1 - r^2}\, r d(r)\right] d(\theta)$$



$$\int r(1-r^2)^{\frac{1}{2}}d(r) \longrightarrow \int -\frac{1}{2}\left\{-2r(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\right\}d(r) = -\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}$$ إن تكامل

$$I = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 d(\theta) = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (0-1)\ d(\theta)$$

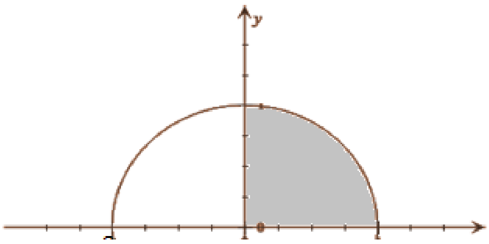
$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\theta) = \frac{1}{3}[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{12}$$

حالات خاصة:

1) $x^2 + y^2 = a^2$

عندئذ تكون حدود التكامل كالتالي:

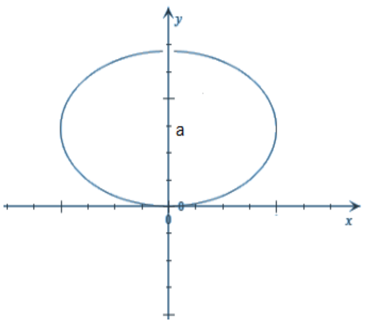
$$\begin{cases}\theta: & 0 \to \frac{\pi}{2} \\ r: & 0 \to a\end{cases}$$



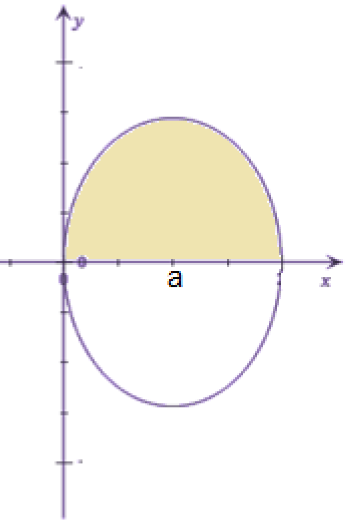
2) $x^2 + (y-a)^2 = a^2$

عندئذ تكون حدود التكامل كالتالي:

$$\begin{cases}\theta: & 0 \to \pi \\ r: & 0 \to 2aSin\ (\theta)\end{cases}$$



3) $(x-a)^2 + y^2 = a^2$

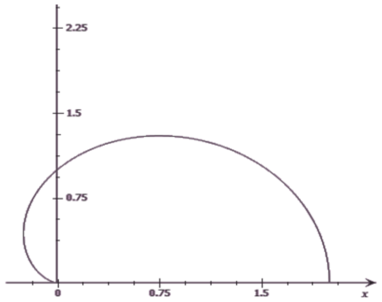


عندئذ تكون حدود التكامل كالتالي:

$$\begin{cases} \theta: & -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \\ r: & 0 \to 2aCOS(\theta) \end{cases}$$

4)الكارديوئيد $r = a(1 + COS(\theta))$

$$\begin{cases} \theta: & 0 \to \pi \\ r: & 0 \to a(1 + COS(\theta)) \end{cases}$$



التكامل الثنائي الشاذ:

هنالك حاتين للتكامل الشاذ:

- أن يكون التابع يعاني من انقطاع في نقطة ما من المنطقة D ويمكن أن يكون الانقطاع في نقطتين منه أو في شريط
- أن تكون المنطقة D غير محدودة

لنبدأ بالحالة الأولى:

لنفرض أنا التابع المكامل $f(x,y)$ غير مستمر عند نقطة ما ولتكن M_0 في هذه الحالة نحيط بهذه النقطة نطاق نسميه BN نصف قطره صغير جدا جدا ونكامل التابع الثنائي المعطى بحذف هذا النطاق ونكتب على الشكل:

$$y = \lim_{\delta N \to 0} \iint_{D/BN} f(x,y)d(x)d(y)$$

وفي نهاية التكامل نجعل نصف القطر صغير جدا $\delta N \to 0$ وعند إيجاد الجواب النهائي نميز حالتين:

- ✓ إذا كان الجواب النهائي عدد ما فإننا نكتب بجانب التكامل بأنه متقارب
- ✓ إذا كان الجواب النهائي ∞ فإننا نكتب بجانب التكامل بأنه متباعد

ملاحظة:

عندما يكون التكامل على منطقة ديكارتية (أي تابع ل x,y)نأخذ النطاق مربع يحيط بالنقطة الشاذة وعندما يكون التكامل على منطقة قطبية (أي تابع ل r,θ)نأخذ النطاق دائرة تحيط بالنقطة الشاذة

أمثلة: احسب قيمة التكاملات التالية:

التمرين (1)

$$I = \iint_D \frac{x^2}{y}\, d(x)d(y)$$

$$D = \begin{cases} x = 0 \\ x = y \\ y = 1 \end{cases}$$

الحل

نلاحظ أن التابع مكامل غير معرف و بالتالي غير موجود وغير مستمر على النقطة التي ترتيبها $y=$ 0وبما أن المعادلة التي تربط بين x,y هي $x=y$ فان النقطة احداثياتها$O(0,0)$ حيث نعوض ترتيب النقطة فنجد أن فاصلة النقطة $x=0$ وهي نقطة شاذة وهذه النقطة تنتمي إلى منطقة التكامل إذا هو عبارة عن تكامل ثنائي من النوع الأول لذلك نحيط بمبدأ الاحداثيات نطاق BN عبارة عن مربع8 نصف قطره δN ثم نكتب التكامل على الشكل:

$$I = \lim_{\delta N \to 0} \int_{y=\delta N}^{y=1} \left[\int_{x=0}^{x=y} \frac{x^2}{y} d(x) \right] d(y)$$

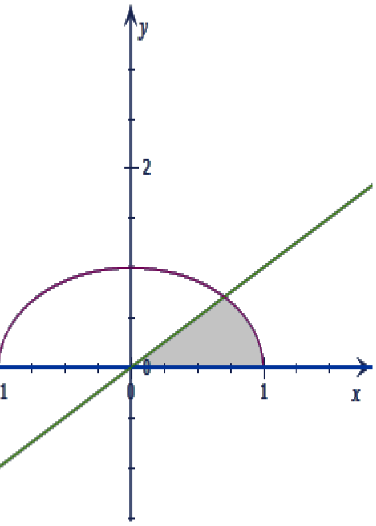
$$I=\lim_{\delta N\to 0}\int_{y=\delta N}^{y=1}\left[\frac{x^3}{3y}\right]_0^y d(y)=\lim_{\delta N\to 0}\int_{y=\delta N}^{y=1}\frac{y^2}{3}d(y)=\lim_{\delta N\to 0}\left[\frac{y^3}{9}\right]_{\delta N}^1$$

$$I=\lim_{\delta N\to 0}\left(\frac{1}{9}-\frac{\delta N^3}{9}\right)=\frac{1}{9}\lim_{\delta N\to 0}-\frac{\delta N^3}{9}\approx\frac{1}{9}$$ فالتكامل متقارب

التمرين(2)

$$I=\iint_D\frac{x+y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}d(x)d(y)$$

$$D=\begin{cases}y=0\\ y=x\\ y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$



الحل

واضح أن التكامل المعطى يعاني من انقطاع في النقطة $O\ (0,0)$ نحيط هذه النقطة بنطاق دائري نصف قطره δN إذا التكامل شاذ

$$I=\lim_{\delta N\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_{\delta N}^{1}r\left(\frac{(COS(\theta)+Sin(\theta))r}{r^3}d(r)\right]d(\theta)$$

$$I=\lim_{\delta N\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{4}}COS(\theta)+Sin(\theta)[ln(r)]_{\delta N}^1 d(\theta)$$

$$I=\lim_{\delta N\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(COS(\theta)+Sin(\theta))[ln(1)-ln(\delta N)]d(\theta)$$

$$I = \lim_{\delta N \to 0} [ln(1) - ln(\delta N)][-COS(\theta) + Sin(\theta)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = (ln(1) \lim_{\delta N \to 0} (-ln(\delta N))[0 - (0 - 1)]$$

$$I = ln(1) \lim_{\delta N \to 0} (-ln(\delta N)) = ln(1)\,(+\infty) = +\infty$$ فالتكامل متباعد

تمرين(3)

$$I = \iint\limits_D \frac{(3\sqrt{y} - 2)}{\sqrt{x}} d(x)d(y)$$

$$D = \begin{cases} x = 1 \\ x = y \\ y = 0 \end{cases}$$

الحل:

نلاحظ أن $x = 0$ و $y = 0$ و بالتالي هي نقطة انقطاع للتابع المكامل نحيط بهذه النقطة نطاق مربع نعتمد أن نصف قطره δN كما في الشكل

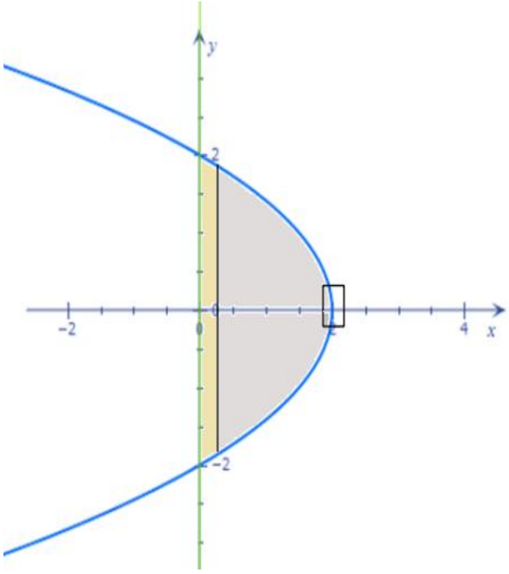
$$I = \lim_{\delta N \to 0} \int_{\delta N}^{x=1} \left[\int_{y=0}^{y=x} \frac{(3\sqrt{y} - 2)}{\sqrt{x}} d(y) \right] d(x)$$

$$I = \lim_{\delta N \to 0} \int_{\delta N}^{x=1} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} (3\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - 2y) \right]_0^x d(x)$$

$$I = \lim_{\delta N \to 0} \int_{\delta N}^{x=1} 2(x - \sqrt{x})d(x) = \lim_{\delta N \to 0} \left[2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \right]_{\delta N}^1$$

$$I = \lim_{\delta N \to 0} \left[2\left(1 - \frac{2}{3}\right) - 2\left(\frac{\delta N^2}{2} - \frac{\frac{2}{3}\delta N^2}{3}\right) \right] \approx -\frac{1}{3}$$ فالتكامل متقارب

سؤال دورة:



أوجد قيمة التكامل التالي: $I = \iint_D \frac{d(x)d(y)}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$D = \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 4 - 2x \end{cases}$$

الحل

إن التابع المكامل يعاني من انقطاع عندما $x = 0$ أي أن جميع نقاط المستقيم تمثل نقاط شاذة و بالتالي نأخذ شريط على طول OY يبتعد عنه باتجاه اليميني بمقدار δN عندها نثبت x بين 2 و δN_1 و نغير ال y بين الجزء السفلي للقطع و بين الجزء العلوي منه أو إما بطريقة أخرى يمكن أن نغير y بين $y = 0$ و الجزء العلوي منه ومن ثم نضرب ب 2 حيث ان المنحني متناظر ولكن نلاحظ أيضا أن الدالة غير معرفة أيضا عند النقطة 2 و هذه النقطة ضمن مجال المكاملة و بالتالي هذه النقطة أيضا شاذة لذلك نحيط النقطة $(0,2)$ بمربع نصف قطره δN_2 و بالنهاية نجد أننا ثبتنا الX بين ال δN_1 و δN_2 و نغير y بين $y = 0$ و $y = +\sqrt{4-2x}$:

$$I_1 = \lim_{\substack{\delta N_1 \to 0 \\ \delta N_2 \to 2}} \int_{\delta N_1}^{\delta N_2} \left[\int_0^{\sqrt{4-2x}} \frac{d(y)}{\sqrt{2x - x^2}} \right] d(x)$$

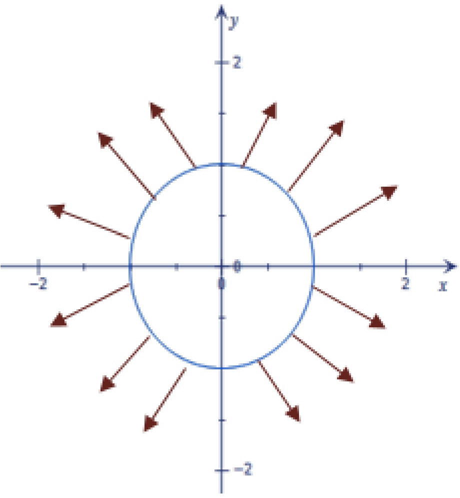
$$I_1 = \lim_{\substack{\delta N_1 \to 0 \\ \delta N_2 \to 2}} \int_{\delta N_1}^{\delta N_2} \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} [y]_0^{\sqrt{4-2x}} \quad d(x)$$

$$I_1 = \lim_{\substack{\delta N_1 \to 0 \\ \delta N_2 \to 2}} \int_{\delta N_1}^{\delta N_2} \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}} \quad d(x) = \lim_{\substack{\delta N_1 \to 0 \\ \delta N_2 \to 2}} 2\sqrt{2} \left[\sqrt{x}\right]_{\delta N1}^{\delta N_2}$$

$$I_1 = \lim_{\substack{\delta N_1 \to 0 \\ \delta N_2 \to 2}} 2\sqrt{2} \left[\sqrt{\delta N_2} - \sqrt{\delta N_1}\right] = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 0\right) \approx 4$$

فالتكامل متقارب $I = 2I_1 \approx 8$

أما الحالة الثانية فتعطى بالشكل أنه في حال لدينا تابع $F(x,y)$ لا يعاني انقطاع ولكن المنطقة D غير محددة فهو يعتبر تكامل شاذ من النوع الثاني وفي هذه الحالة نعزل المنطقة باستخدام $D \cap BN$ ثم نأخذ النهاية كما في الحالة الأولى:



مثال (1):

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} d(x) d(y)$$

$$; D \equiv x^2 + y^2 \geq 1$$

الحل

نلاحظ أن هذا التكامل من النوع الثاني لأن المنطقة غير محدودة نلجأ الى الاحداثيات القطبية لأن دالة التكامل مؤلفة من $x^2 + y^2$

$$I = \lim_{\delta N \to \infty} \int_0^{2\pi} \left[\int_{r=1}^{r=\delta N} e^{-r^2} r d(r) \right] d(\theta) = \lim_{\delta N \to \infty} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_1^{\delta N} d(\theta)$$

$$I = \lim_{\delta N \to \infty} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-\delta N^2} + \frac{1}{2} e^{-1} \right) d(\theta) = \{ \frac{1}{2} e^{-1} - \lim_{\delta N \to \infty} (-\frac{1}{2} e^{-\delta N^2}) \} [\theta]_0^{2\pi}$$

$$I = \left\{ \frac{1}{2} e^{-1} - \lim_{\delta N \to \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-\delta N^2} \right) \right\} (2\pi - 0) = \pi e^{-1} - \lim_{\delta N \to \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-\delta N^2} \right)$$

فالتكامل متقارب $I = \dfrac{\pi}{e}$

ملاحظات:

1. في الاحداثيات الديكارتية يكون الثبيت عند δN سواء كانت في التكامل الأول أو الثاني
2. عند التعويض بالإحداثيات القطبية نضع δN في التكامل الثاني حصرا
3. عند وضع حدود التكامل (تعيين منطقة التكامل بالنسبة للإحداثيات القطبية نميز ثلاث حالات:

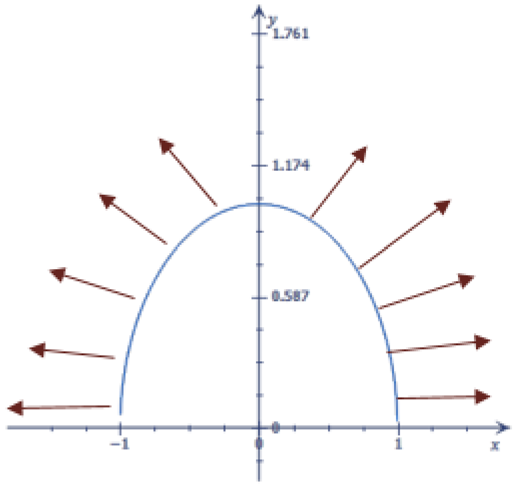
- ✓ أن تكون المعادلة القطبية التي تمثل بالشكل الخاص: $x^2 + y^2 = a^2$ وهي تمثل معادلة محيط الدائرة
- ✓ أن تكون المعادلة القطبية التي تمثل بالمتراجحة $x^2 + y^2 \geq a^2$ وهي تمثل جميع النقاط الواقعة خارج الدائرة (في هذه الحالة يكون التكامل شاذ من النوع الثاني) اذ أنه يوجد عدد غير محدود من النقاط الواقعة خارج هذا النطاق
- ✓ أن تكون المعادلة القطبية التي تمثل بالمتراجحة $x^2 + y^2 \leq a^2$ وهي تمثل جميع النقاط المحتواة في الدائرة

مثال (2):

$$I = \iint_D \frac{d(x)d(y)}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$D \equiv \{(x, y)\}; y \geq 0$$

الحل:



إن التكامل المعطى شاذ لأن المنطقة غير محددة فهي تمثل جميع النقاط الواقعة في القسم العلوي من المستوي ويمكن حل هذا التكامل ديكارتيا أو قطبيا وسنلجأ الى الحل الأسهل وهو القطبي لذلك نأخذ نطاق نصف دائري:

$$I = \lim_{\delta N \to \infty} \int_0^{\pi} \left[\int_{r=0}^{r=\delta N} \frac{r d(r)}{(r^2+1)^{\frac{5}{2}}} \right] d(\theta)$$

$$I = \lim_{\delta N \to \infty} \int_0^{\pi} \left[-\frac{1}{2} \frac{2}{3(r^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right]_0^{\delta N} d(\theta)$$

$$I = -\frac{1}{3} \lim_{\delta N \to \infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\delta N^2+1)^{\frac{3}{2}}} - 1\, d(\theta)$$

$$I = -\frac{1}{3} \left(\lim_{\delta N \to \infty} \frac{1}{(\delta N^2+1)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right) [\theta]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{3} \left(\lim_{\delta N \to \infty} \frac{1}{(\delta N^2+1)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right)$$

$$I = -\frac{\pi}{3}(0-1) \approx \frac{\pi}{3}$$ فالتكامل متقارب